Exercice 4 **5 points**

Partie A

$$u_{n+1} = 2u_n\left(1 - u_n\right).$$

Cette relation de récurrence s'écrit $u_{n+1} = f\left(u_n\right)$, où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x(1-x).$$

1. f est une fonction polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :
   $f(x) = 2x - 2x^2$, d'où $f'(x) = 2 - 4x = 2(1-2x)$.
   On a :
   - $f'(x) = 0 \iff 1 - 2x = 0 \iff x = \dfrac{1}{2}$;
   - $f'(x) > 0 \iff 1 - 2x > 0 \iff x < \dfrac{1}{2}$; la dérivée est positive sur $\left[0~;~\dfrac{1}{2}\right]$, la fonction f est donc croissante sur cet intervalle.
   - $f'(x) < 0 \iff 1 - 2x < 0 \iff x > \dfrac{1}{2}$;
2. On admet que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2}$.
   - $u_1 = 2u_0\left(1 - u_0\right) = 2 \times 0,3 \times 0,7 = 0,42$.
   - Démonstration par récurrence :

     — *Initialisation* : on a $u_0 \leqslant u_1$ car $0,3 \leqslant 0,42$.

     — *Hérédité* On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leqslant u_{n+1}$.
     Comme on suppose que $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$ on a par croissance de la fonction f sur $\left[0~;~\dfrac{1}{2}\right]$, $f\left(u_n\right) \leqslant f\left(u_{n+1}\right) \leqslant f\left(\dfrac{1}{2}\right)$, soit
     $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 2 \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2}$, ou encore $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \dfrac{1}{2}$: l'encadrement est vrai au rang $n+1$.
     La relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$ elle l'est encore au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence on a démontré que :
     pour tout rentier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$
3. Cet encadrement montre que

— la suite (u_n) est croissante et
— la suite (u_n) est majorée par $\frac{1}{2}$.

Conclusion la suite (u_n) croissante et majorée converge vers une limite $\ell \leqslant \frac{1}{2}$.

4. La fonction f étant continue on a donc :
$\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} 2u_n(1-u_n)$, soit
$\ell = 2\ell(1-\ell) \iff \ell = 2\ell - 2\ell^2 \iff 2\ell^2 - \ell = 0 \iff \ell(2\ell-1) = 0 \iff \left\{\begin{array}{rcl} \ell & = & 0 \\ 2\ell - 1 & = & 0 \end{array}\right. \iff$
$\left\{\begin{array}{rcl} \ell & = & 0 \\ \ell & = & \frac{1}{2} \end{array}\right.$ La seule solution acceptable est $\ell = \frac{1}{2}$.

Partie B

$$P_{n+1} - P_n = P_n(1 - b \times P_n), \text{ où } b \text{ est un réel strictement positif.}$$

Le réel b est un facteur de freinage qui permet de tenir compte du caractère limité des ressources du milieu dans lequel évoluent ces individus.

1. Dans cette question $b = 0$.

a. La relation de récurrence s'écrit alors $P_{n+1} - P_n = P_n(1 - 0 \times P_n)$, soit
$P_{n+1} - P_n = P_n \iff P_{n+1} = 2P_n$, donc $P_{n+1} = 2P_n$: cette égalité montre que la suite (P_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $P_0 = 3$.

b. On sait quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $P_n = P_0 \times 2^n = 3 \times 2^n$: la limite de la suite (P_n) est plus l'infini (irréaliste)

2. Dans cette question $b = 0,2$. On a donc $P_{n+1} - P_n = P_n(1 - 0,2P_n)$

a. On a $v_0 = 0,1 \times P_0 = 0,1 \times 3 = 0,3$.
La relation de récurrence devient :
$P_{n+1} - P_n = P_n(1 - 0,2 \times P_n) \iff P_{n+1} - P_n = P_n - 0,2P_n^2$, d'où
$P_{n+1} = 2P_n - 0,2P_n^2$. (1)
Or $v_{n+1} = 0,1P_{n+1} = 0,1\left(2P_n - 0,2P_n^2\right) = 0,2\left(P_n - 0,1P_n^2\right)$.
Comme $v_n = 0,1 \times P_n \iff 10v_n = P_n$, l'égalité ci-dessus devient :
$v_{n+1} = 0,2\left(10v_n - 0,1 \times (10v_n)^2\right)$, soit
$v_{n+1} = 0,2\left(10v_n - 10v_n^2\right) = 2v_n(1 - v_n)$.

b. La relation de la question précédente montre que la suite (v_n) est la suite (u_n) de la **Partie A** et on a vu que cette suite converge vers $\frac{1}{2}$.
On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{2}$.
Or $P_n = 10v_n$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = 10 \times \frac{1}{2} = 5$.
Finalement la population se rapprochera de 5 000 individus.